

# **Тема 3. Способы изображения кристаллов** **(кристаллографические проекции).** ***(Лекции 3, 4)***

## **Содержание**

3.1. Понятие кристаллического многогранника.

3.2. Типы кристаллографических проекций.

3.2.1. Понятия планарного и полярного комплексов.

3.2.2. Аксонометрические и ортогональные проекции.

3.2.3. Сферическая проекция.

3.2.4. Стереографическая проекция.

3.2.5. Гномостереографическая проекция.

3.2.6. Гномоническая проекция.

3.3. Стереографические сетки. Сетка Вульфа.

3.4. Формулы соответствия между полярными координатами  $(\rho, \varphi)$  направлений в кристаллах и их координатными углами  $(\lambda, \mu, \nu)$ .

Контрольные вопросы и задания по Теме 3.

*кафедра физики металлов, ФФ ТГУ,*

*специальность 01.04.07 –*

*«физика конденсированного состояния» Томск - 2010*

## Тема 3

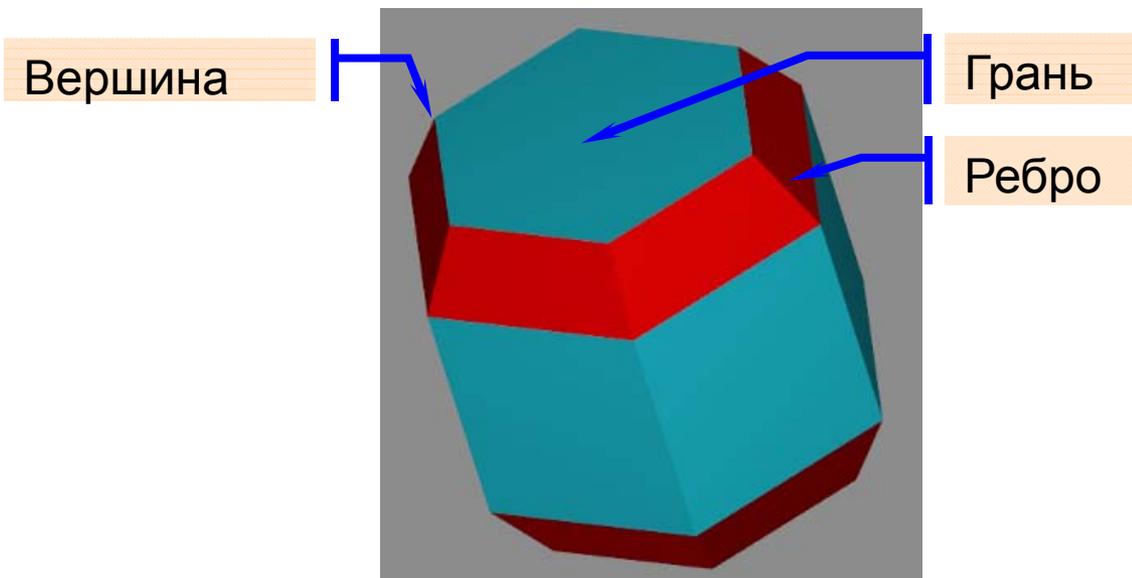
# Способы изображения кристаллов (кристаллографические проекции).

## 3.1. Понятие кристаллического многогранника

**Многогранник** в трёхмерном пространстве - совокупность конечного числа плоских многоугольников, каждая сторона которого есть одновременно стороной другого (но только одного), называемого смежным с первым (по этой стороне).

От любого из многоугольников, составляющих  $M$ ., можно дойти до любого из них, переходя к смежному с ним, а от этого, в свою очередь, — к смежному с ним, и т. д.

Эти многоугольники называются **гранями**, их стороны — **рёбрами**, а их вершины — **вершинами** многогранника



## 3.2. Типы кристаллографических проекций

Одна из задач кристаллографии – изображение кристалла.

Два метода изображения кристалла: - **образный** (перспективный) и **графический**.

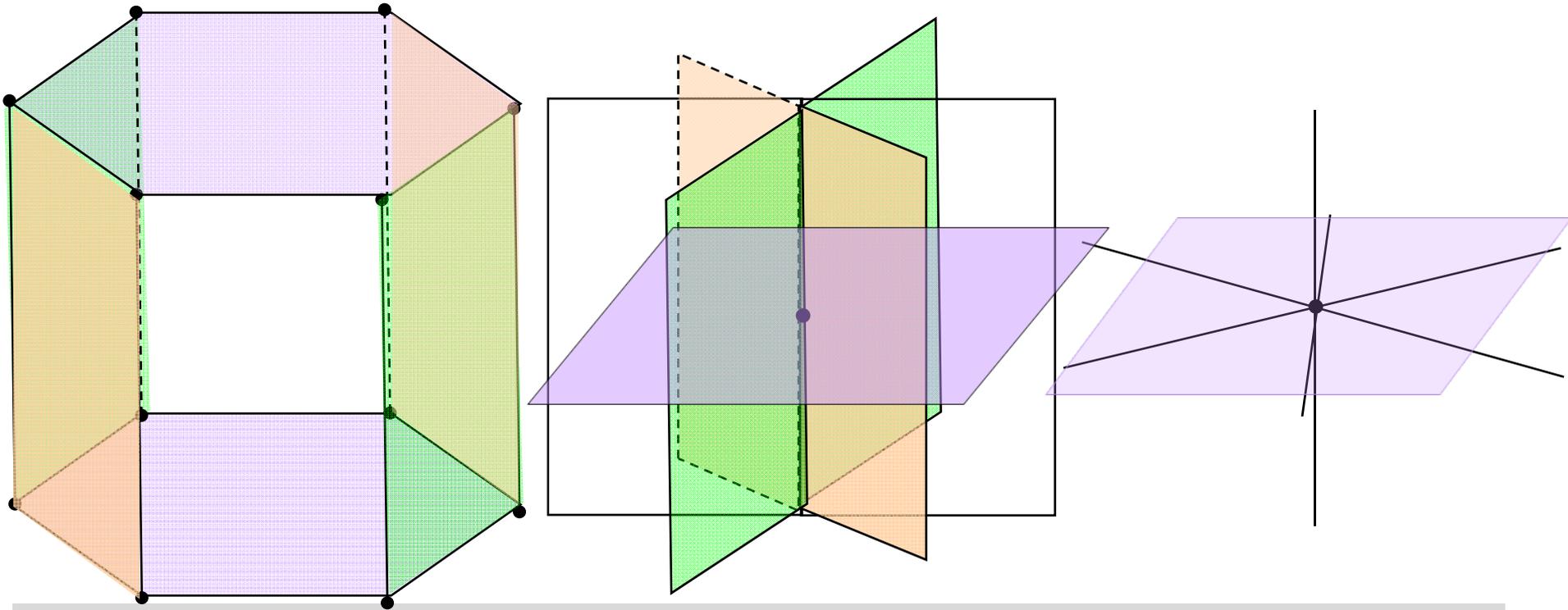
**Образный метод** – дает реальное перспективное представление о форме и взаимном расположении граней кристалла;

**графический метод** – дает точные значения углов между гранями, представленные схематически в виде линий и точек.

Виды проекций: аксонометрическая,  
ортогональная,  
сферическая,  
стереографическая,  
гномостереографическая,  
гномоническая

Проекции кристаллов позволяют определять взаимное расположение граней, углы между ними и элементы симметрии.

### 3.2.1. Понятия планарного и полярного комплексов.



**Планарный комплекс** - совокупность всех граней кристаллического многогранника, которые в результате параллельного переноса получили общую точку пересечения – центр комплекса.

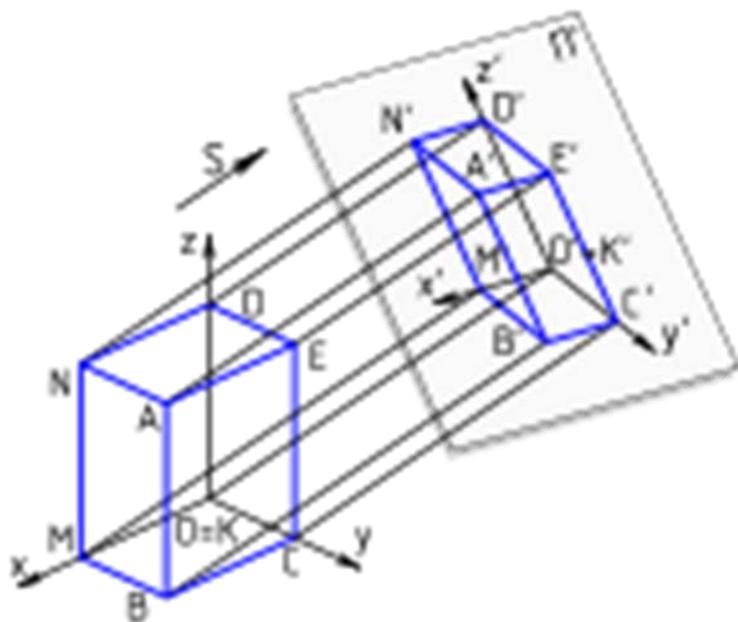
**Любым двум параллельным граням** кристаллического многогранника соответствует **одна плоскость** планарного комплекса.

**Полярный комплекс** - совокупность нормалей ко всем граням кристаллического многогранника, исходящих из одной точки.

### 3.2.2. Аксонометрические и ортогональные проекции

**Проекция** (от лат. *projection*, букв. – выбрасывание вперед) – изображение пространственных фигур на плоскости или какой-либо другой поверхности. При этом проекция фигуры представляет собой совокупность проекций всех ее точек.

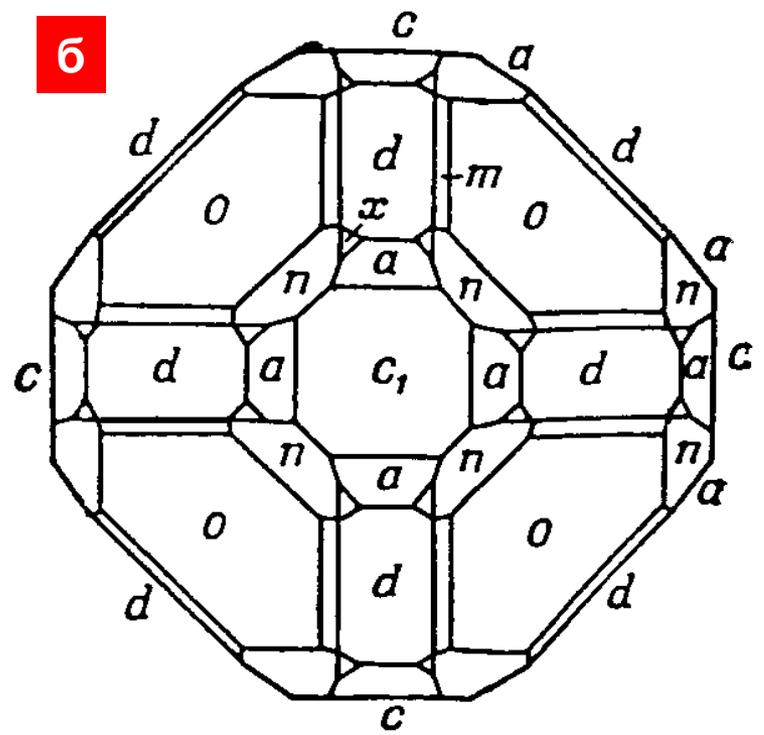
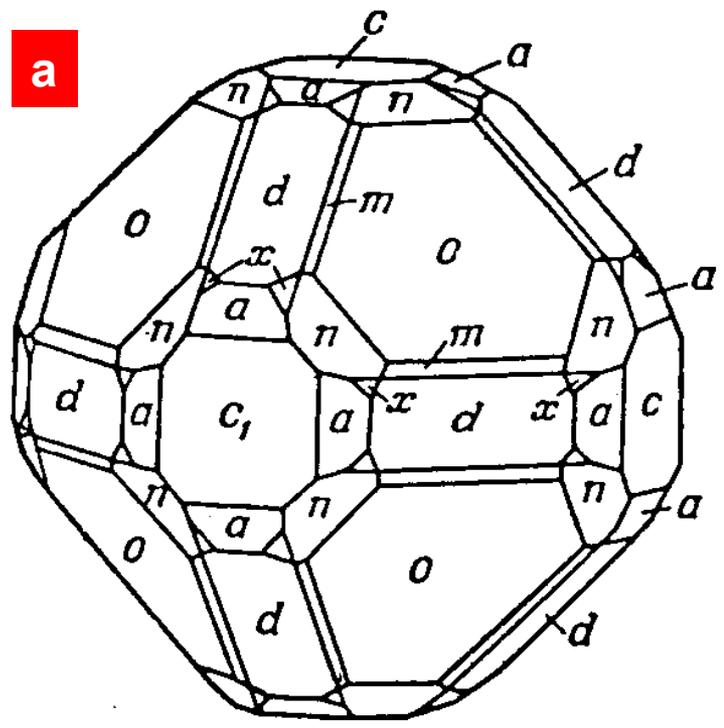
**Аксонометрическая проекция** (греч. *άξον* — «ось» и «метрия») — способ изображения геометрических предметов на чертеже при помощи параллельных проекций.



Предмет с системой координат, к которой он отнесён, проецируют на произвольную плоскость (картинная плоскость аксонометрической проекции) таким образом, чтобы эта плоскость не совпадала с его координатной плоскостью. В этом случае получается две взаимосвязанные проекции одной фигуры на одну плоскость, что позволяет восстановить положение в пространстве, получив наглядное изображение предмета. Так как картинная плоскость не параллельна ни одной из координатных осей, то имеются искажения отрезков по длине параллельных координатным осям.

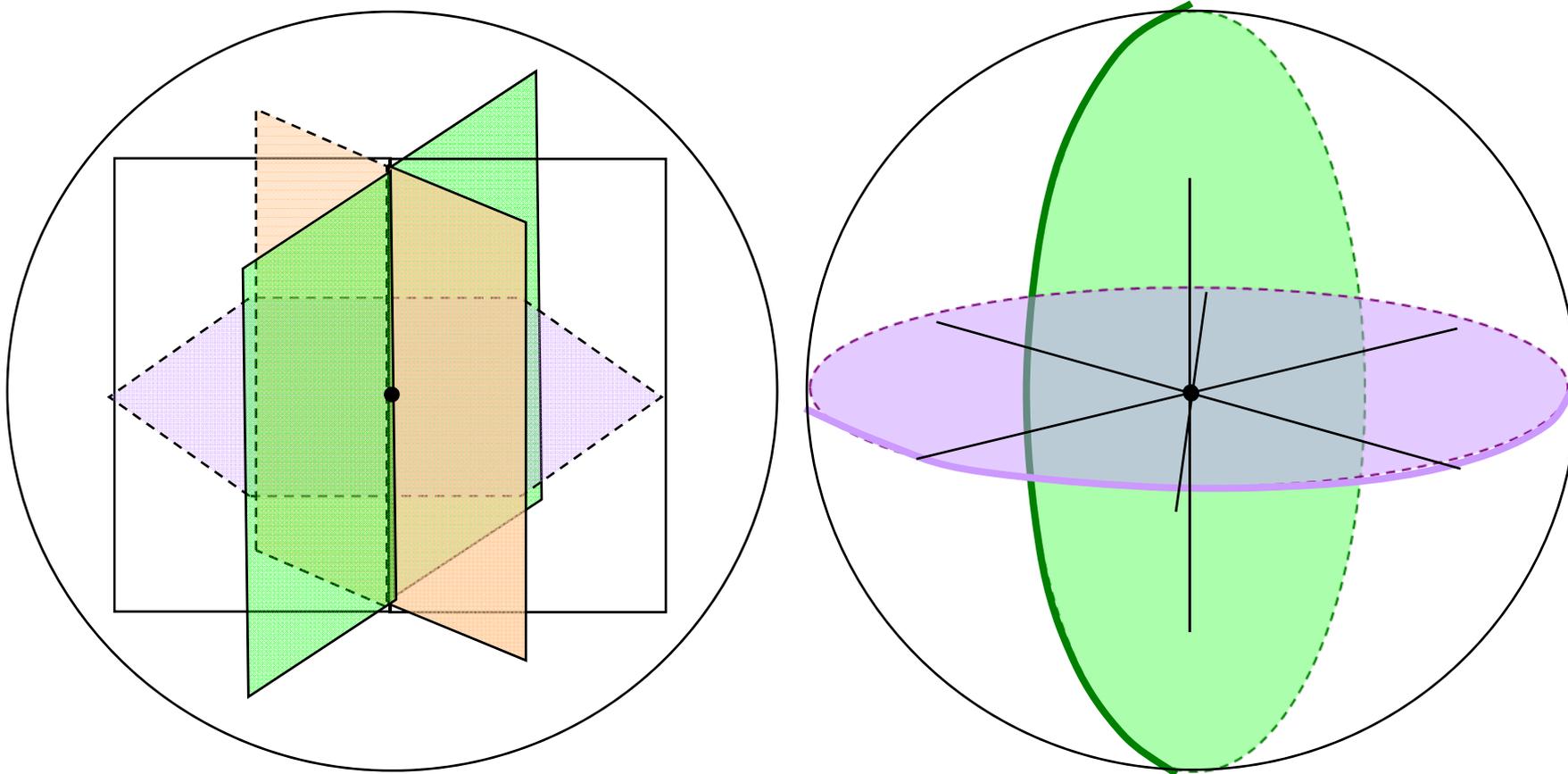
Это искажение может быть равным по всем трём осям — *изометрическая проекция*, одинаковыми по двум осям — *диметрическая проекция* и с искажениями разными по всем трём осям — *триметрическая проекция*.

*Ортогональная проекция* - параллельные проектирующие лучи падают перпендикулярно плоскости проекции, обычно совмещённой с той или иной гранью кристалла.



Проекции кристалла флюорита: а – аксонометрическая, б – ортогональная.

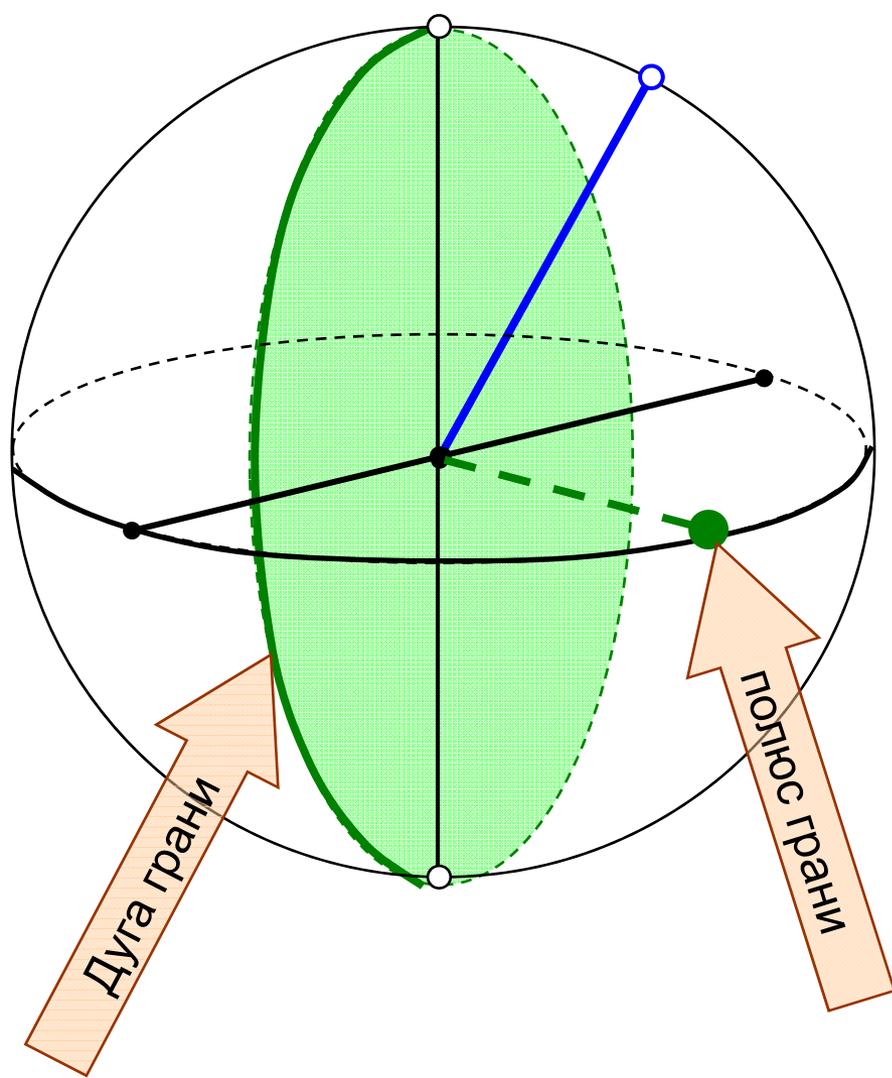
### 3.2.3. Сферическая проекция



#### Построение:

вокруг кристаллического комплекса (**КК**) описывается сфера произвольного радиуса;

плоскости или нормали **КК** продолжают до пересечения со сферой.



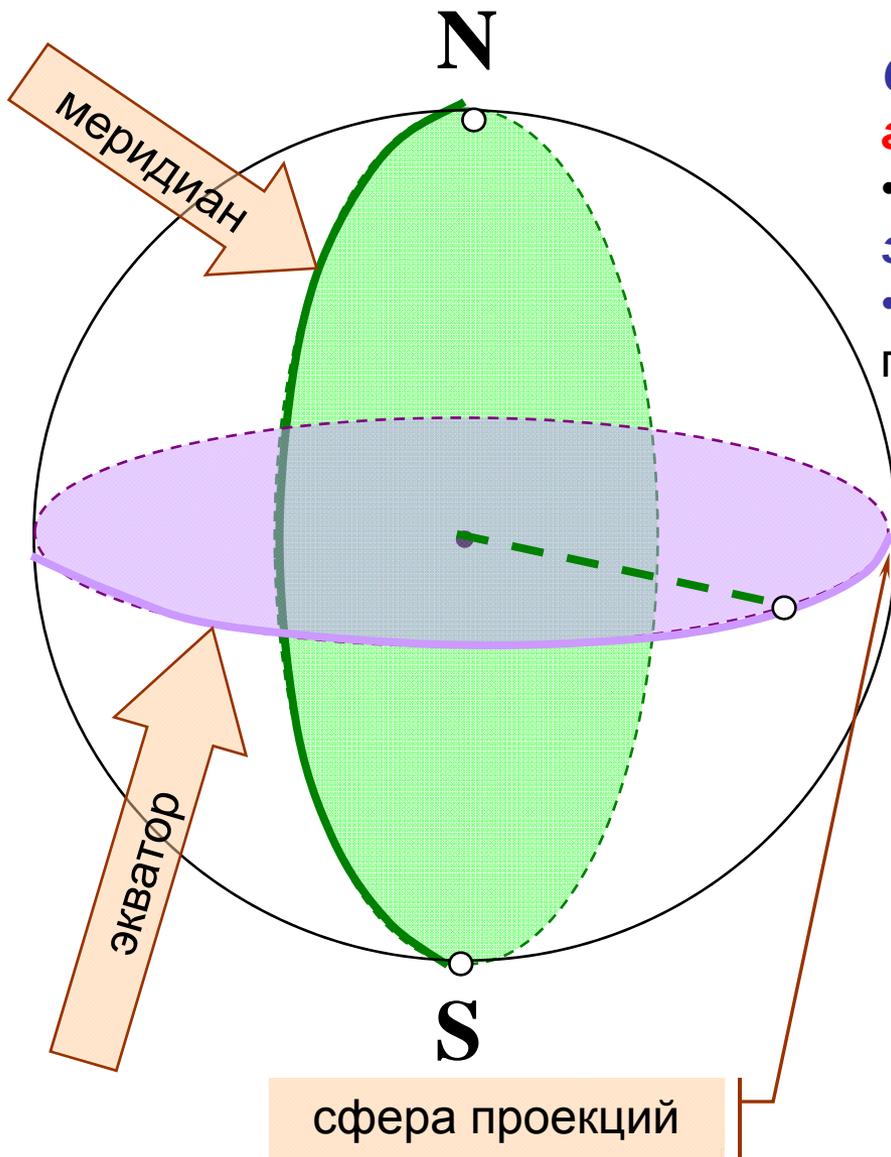
**Сферическая проекция направления** (нормали к грани) – след пересечения направления, проходящего через центр сферы произвольного радиуса с поверхностью сферы.

**Сферическая проекция оси симметрии** – две диаметрально противоположные точки на сфере - следы пересечения оси симметрии, проходящей через центр сферы произвольного радиуса с поверхностью сферы.

**Сферическая проекция грани кристалла** имеет два эквивалентных изображения:

**дуга грани** – большой круг на сфере – центральное сечение данной плоскостью, проведенное через центр сферы;

**полус грани** – точка на сфере – след пересечения нормали к грани со сферой проекции.



**Сферическая проекция горизонтальной грани** изображается

- большим горизонтальным кругом – **экватором сферы проекций**;
- **точкой** на одном из полюсов сферы проекций («северном» или «южном»).

**Сферическая проекция вертикальной грани** изображается

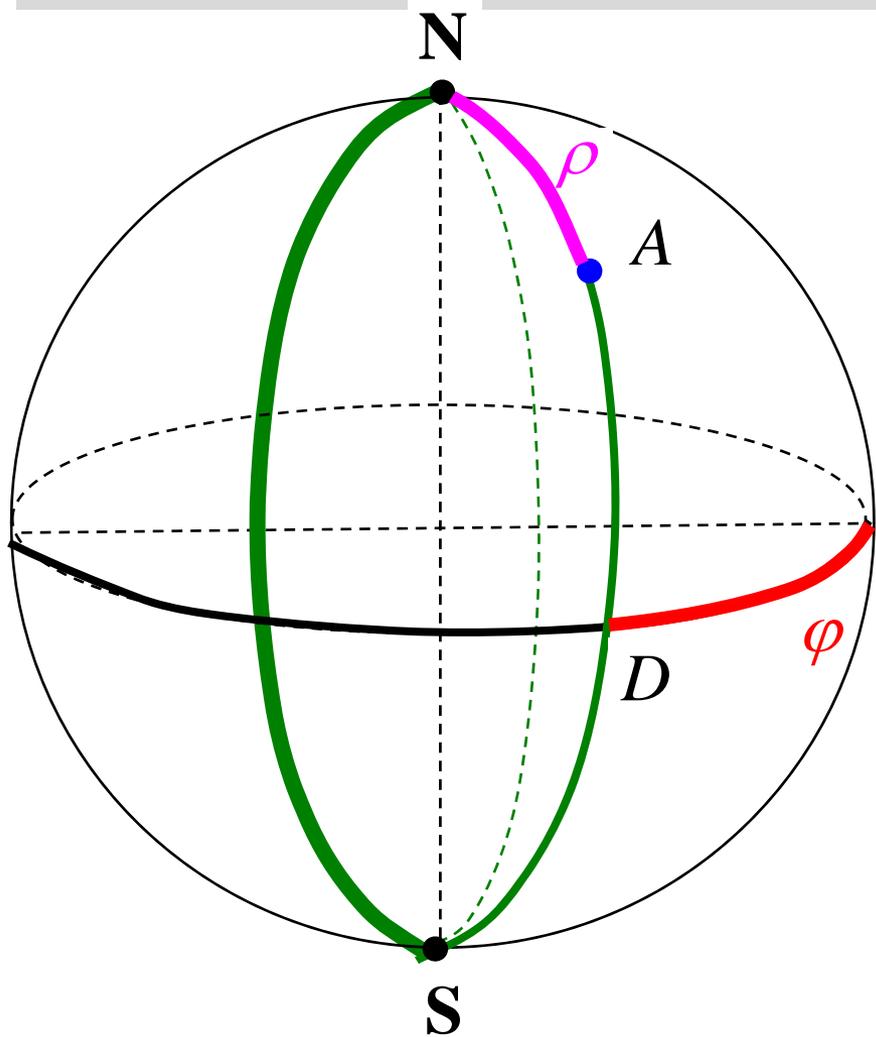
- большим вертикальным кругом – **меридиональным сечением сферы проекций**;
- **точкой** на экваторе.

**Сфера проекций** делится на 2 полусферы – верхнюю и нижнюю. Точки экватора относят к верхней полусфере.

## Сферические координаты:

$\rho$  - **полярное расстояние**, рассчитываемое по любому направлению от нуля («северный» полюс) до 180 градусов;

$\varphi$  - **долгота**, отсчитываемая по экватору от меридиана, принятого за нулевой меридиан, от нуля до 360 градусов.

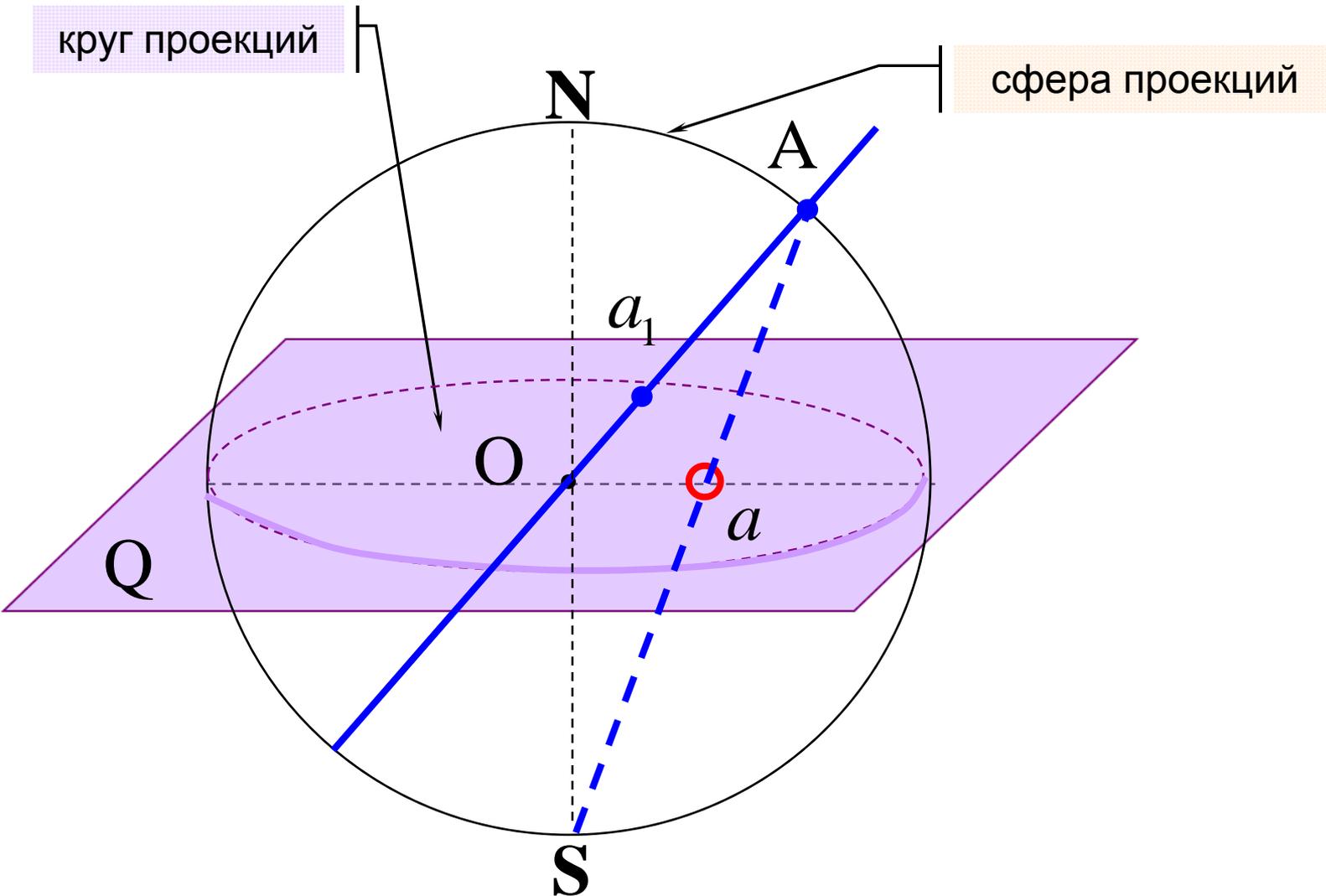


$\varphi = 0^\circ$

Запись:

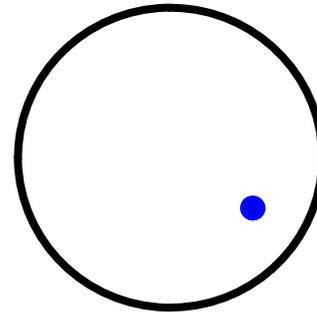
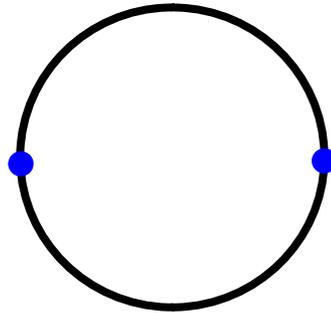
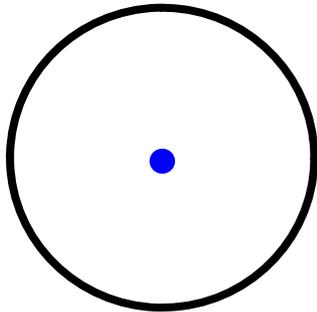
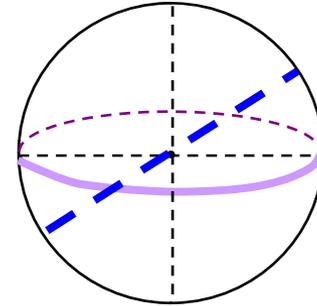
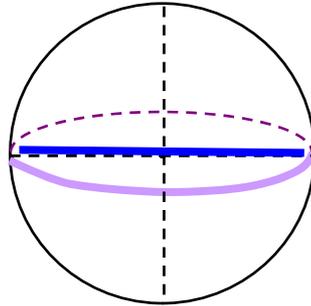
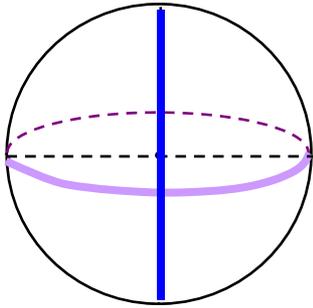
$$A(\varphi, \rho)$$

### 3.2.4. Стереографическая проекция



Стереографические проекции **направлений** изображаются **точками** внутри круга проекций, а **плоскостей** – **дугами** большого круга.

Стереографические проекции *направлений* изображаются *точками* внутри круга проекций:

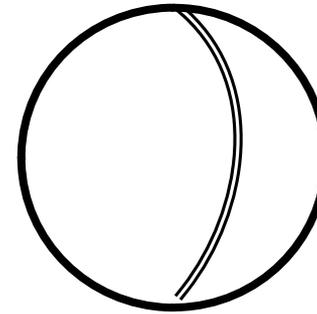
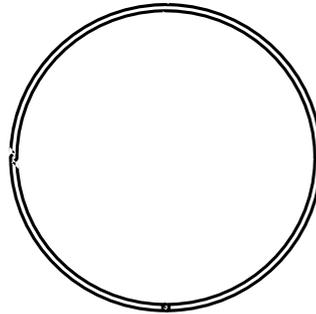
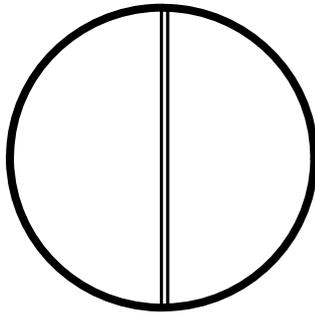
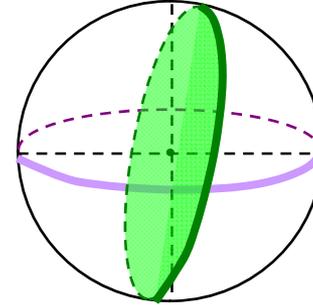
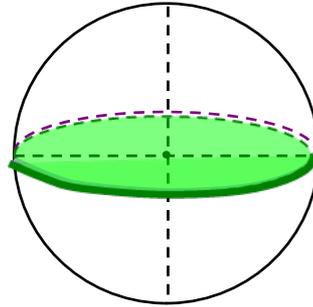
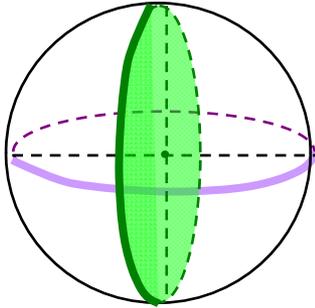


⊥ пл. проекции

в пл. проекции

под косым углом к  
пл. проекции

Стереографические проекции *плоскостей* изображаются *дугами* большого круга:



⊥ пл. проекции

в пл. проекции

под косым углом к  
пл. проекции

## Свойства стереографических проекций

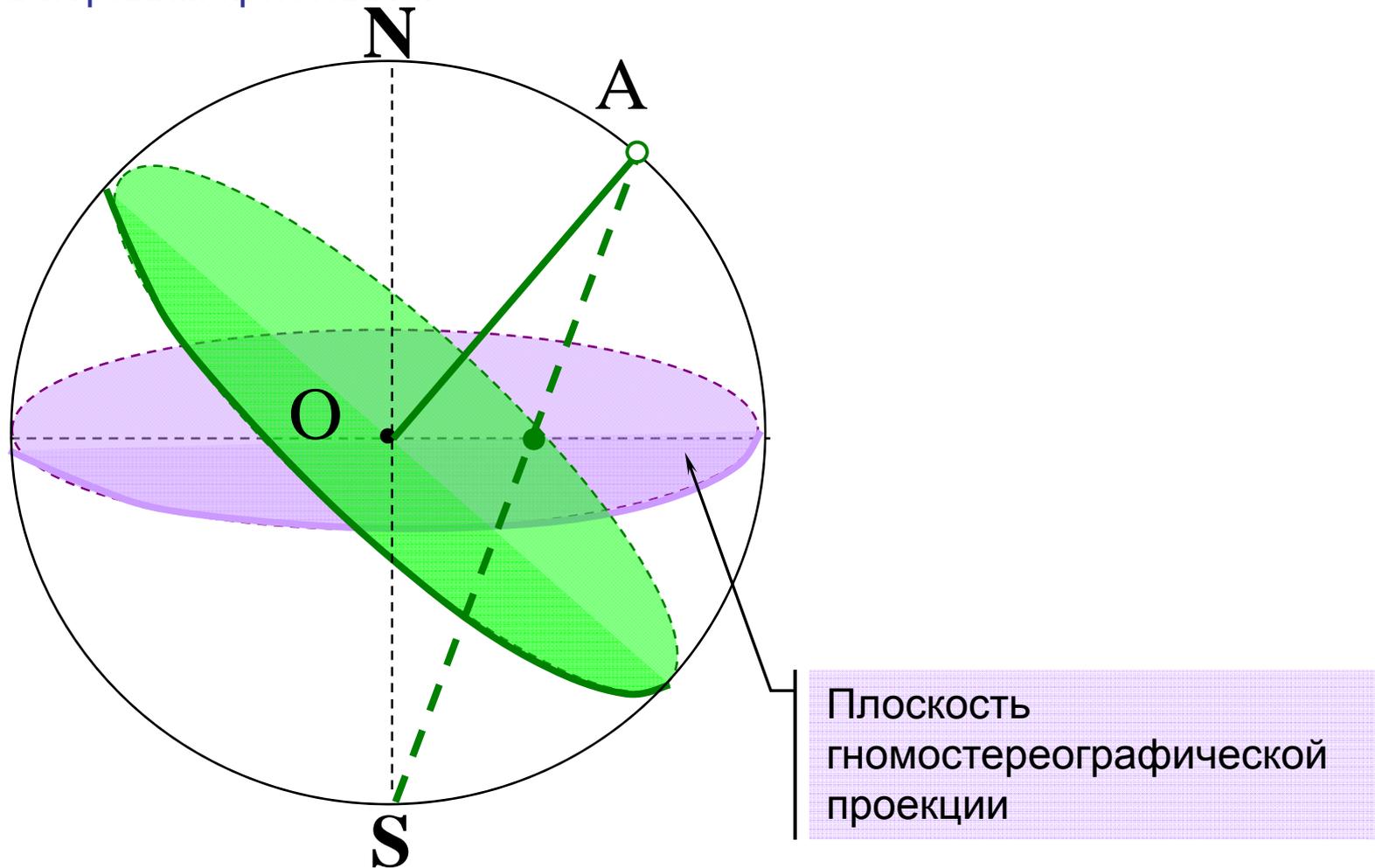
1. Любая окружность, проведенная на сфере, изображается на СтП также окружностью (в частном случае – прямой линией);
2. на СтП не искажаются угловые соотношения; угол между полюсами граней на сфере (измеренный по дугам больших кругов) равен углу между СтП тех же дуг.

**Стереографические** проекции применяются для изображения **элементов симметрии кристалла**.

### 3.2.5. Гномостереографическая проекция (ГСП)

-применяется для изображения кристаллических многогранников. При этом **проектируется** не многогранник, а его **полярный комплекс**, т.е. не грань кристалла, а **нормаль к грани**;

- представляет собой **совокупность стереографических проекций нормалей** к граням кристалла.



## Правила построения ГСП:

Для построения ГСП **нормалей**, пересекающих шар **в нижней полусфере**, **переносят точку зрения** в северный полюс N сферы проекций.

Проекции граней, расположенных **выше плоскости проекции** обозначают **кружками**, а **нижних** – **крестиками**.

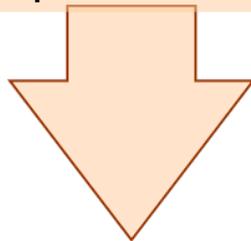
**горизонтальные грани** проектируются **в центре круга проекций** (верхняя кружком, нижняя – крестиком);

**вертикальные грани** – **на самом круге проекций**,

**косые грани** – **внутри** него.

ГСП ребер кристалла изображаются так же, как нормали к граням.

Комплекс граней, нормали к которым лежат в одной плоскости, образует **зону**

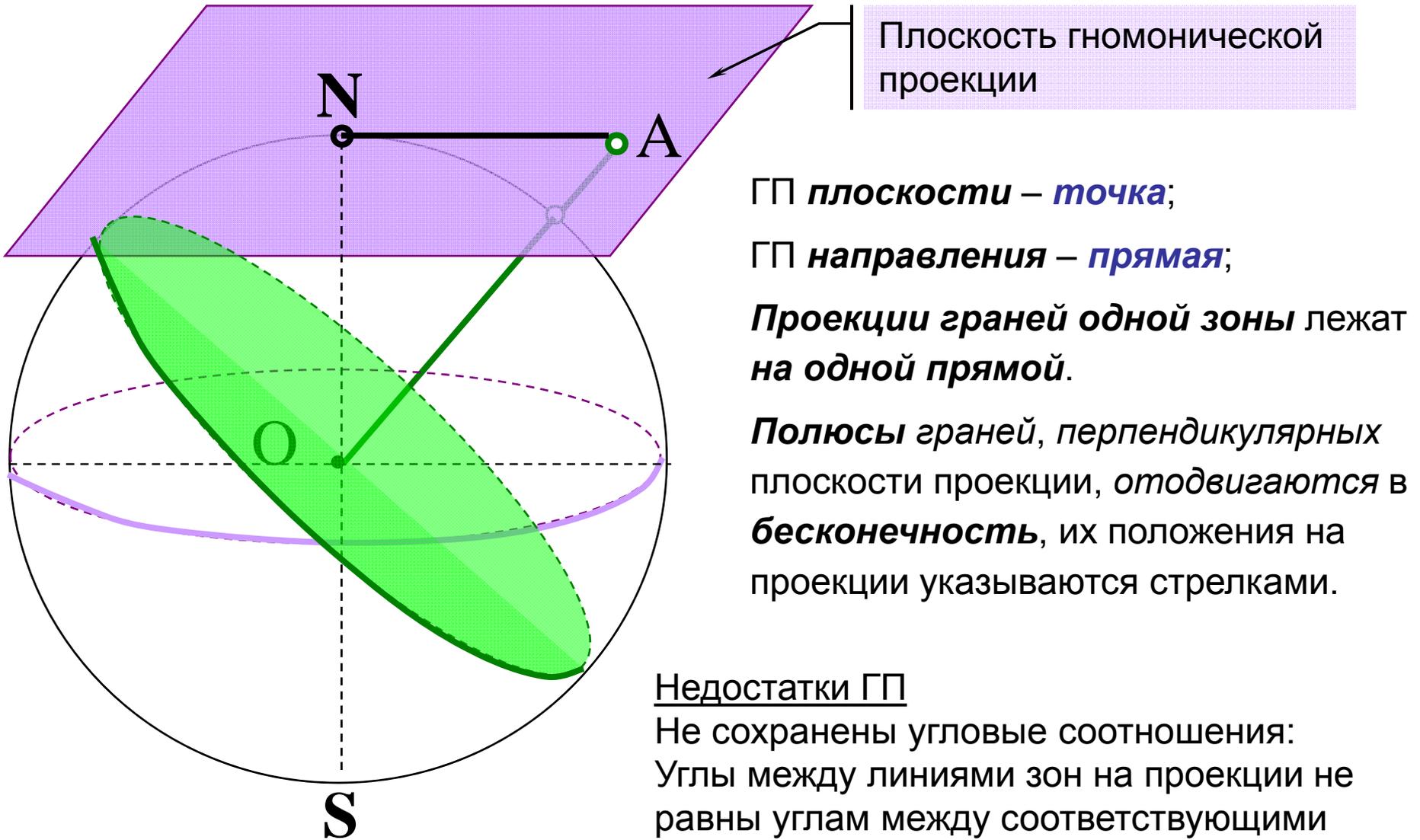


**Знаем!!!**

**Проекции** граней, принадлежащих **одной зоне**, располагаются **на одной дуге** большого круга.

### 3.2.6. Гномоническая проекция (ГП).

- широко применяется в рентгеноструктурном анализе.



Плоскость гномонической проекции

ГП *плоскости* – **точка**;

ГП *направления* – **прямая**;

**Проекции граней одной зоны лежат на одной прямой.**

**Полюсы граней, перпендикулярных плоскости проекции, отодвигаются в бесконечность**, их положения на проекции указываются стрелками.

#### Недостатки ГП

Не сохранены угловые соотношения: Углы между линиями зон на проекции не равны углам между соответствующими плоскостями одной зоны на кристалле.

## 3.3. Стереографические сетки. Сетка Вульфа.

### 3.3.1. Сетка Вульфа.

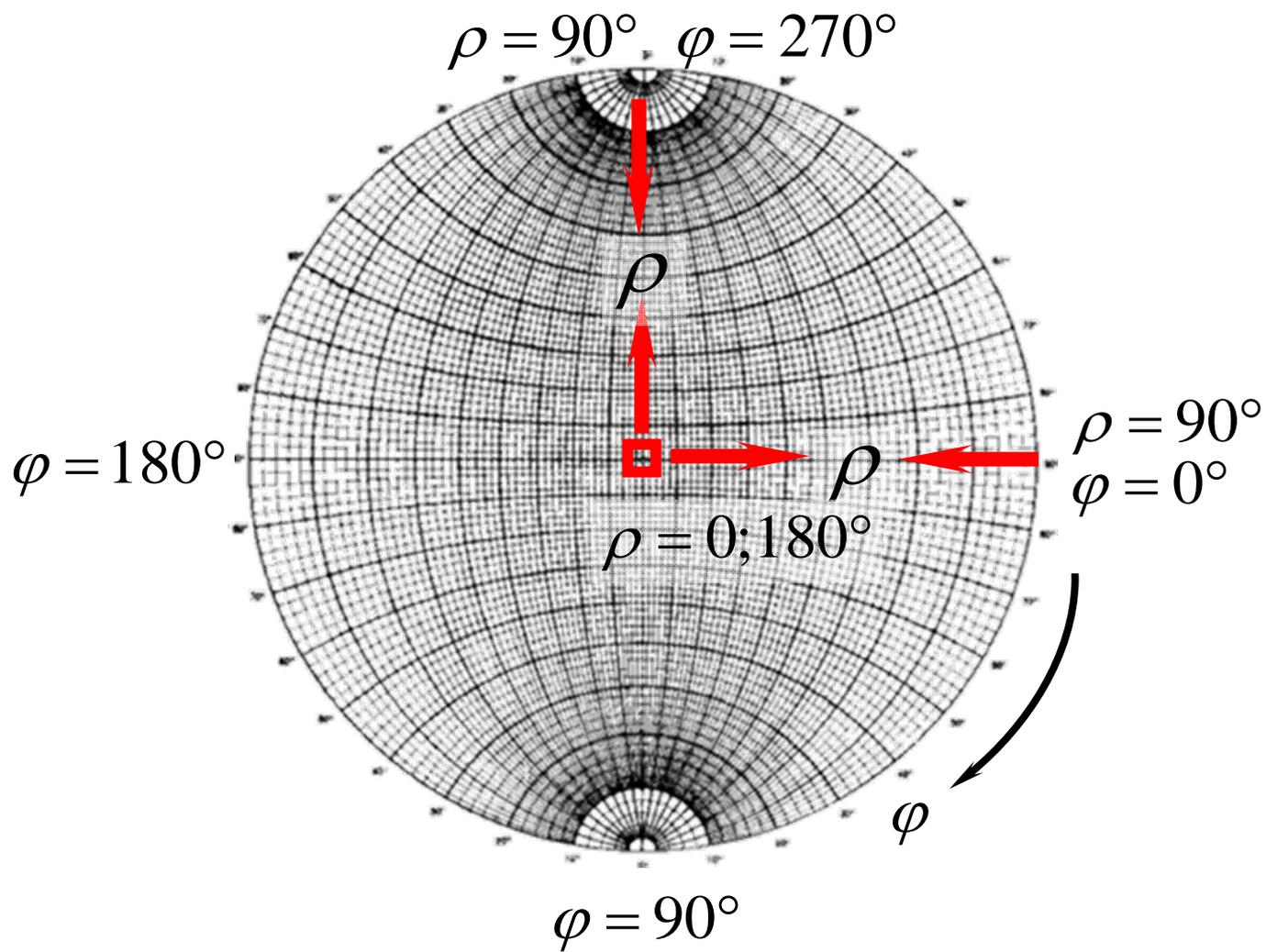
**Сетка Вульфа** - проекция градусной сетки, нанесенной на сферу, полюсы которой лежат в плоскости проекции;

- комбинация проекций больших кругов (**меридианы** на сетке) и малых кругов (**параллели** на сетке), отстоящих друг от друга на 2 градуса.

Положение любой точки на сетке Вульфа определяется сферическими координатами

$$(\rho, \varphi)$$

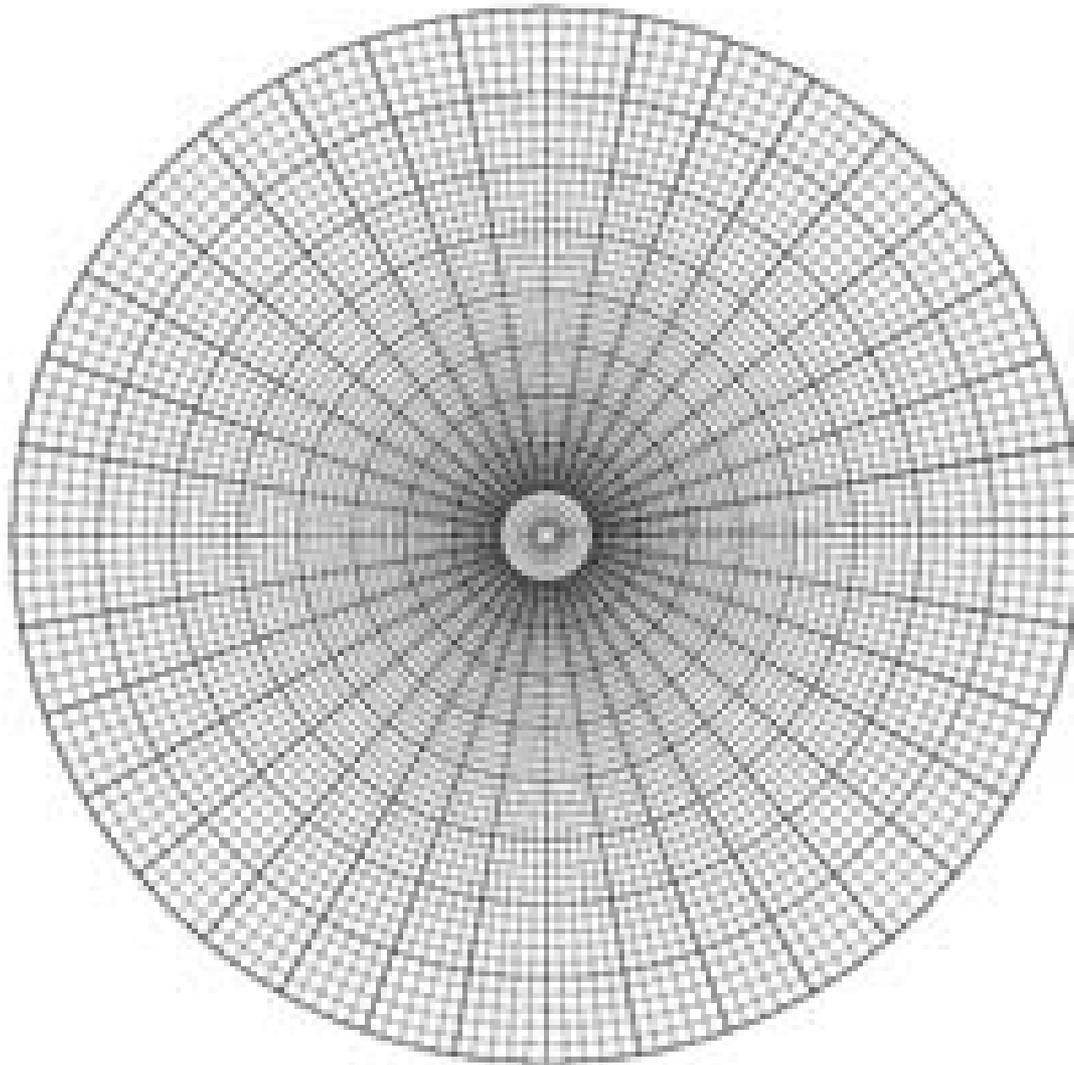
которые отсчитываются, соответственно, **от центра и правого конца** горизонтального диаметра основного круга.



**Сетка Вульфа.**

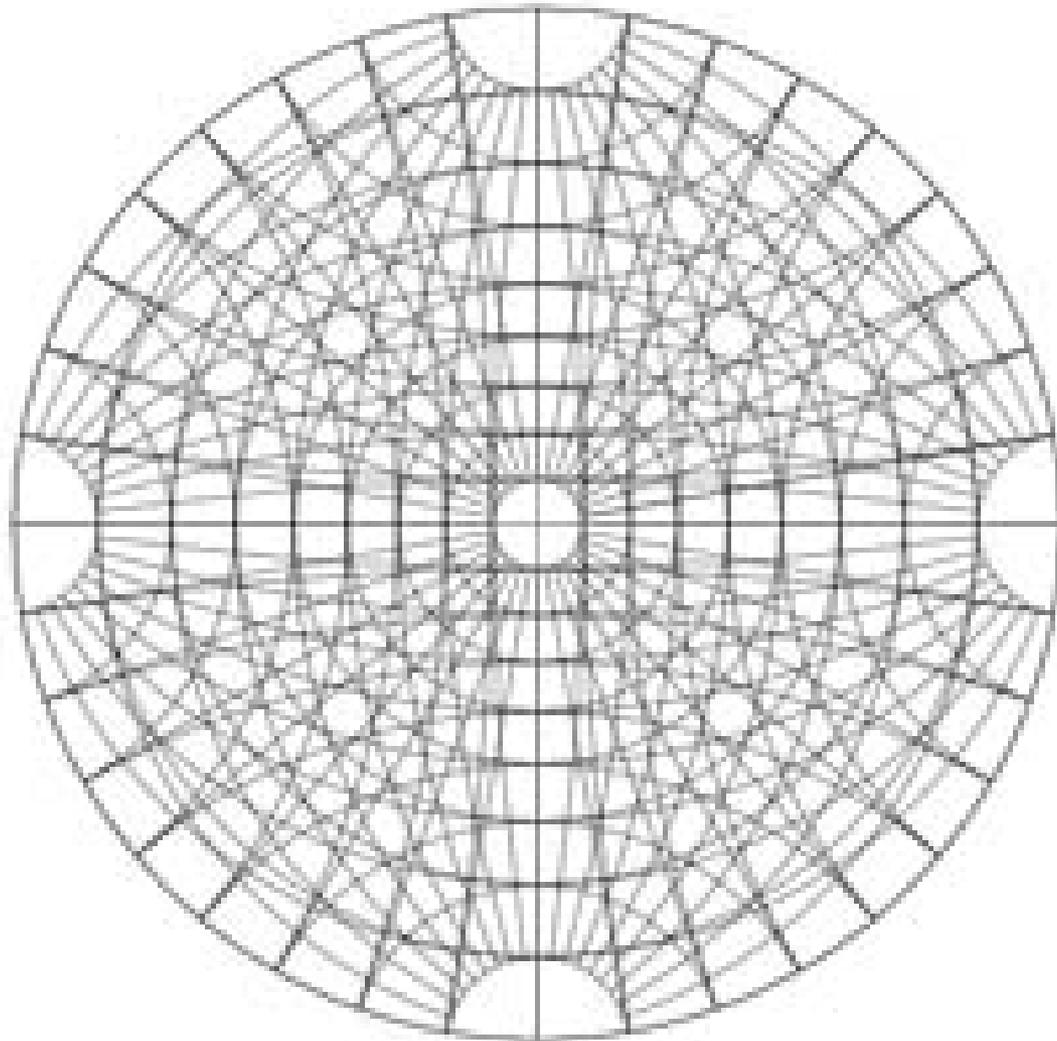
### 3.3.2. Полярная сетка (Сетка Болдырева)

- стереографическая проекция градусной сетки сферы на экваториальную плоскость.

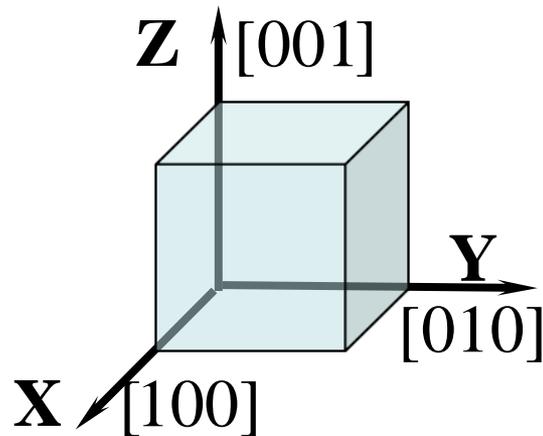


### 3.3.3. Сетка Федорова

-сочетание двух экваториальных сеток (подобных сеткам Вульфа), повернутых друг относительно друга на 90 градусов и полярной сетки.



# Характеристики координатных направлений в кубических кристаллах



Координатное направление	<b>+OX</b>	<b>+OY</b>	<b>+OZ</b>	<b>-OX</b>	<b>-OY</b>	<b>-OZ</b>
Кристаллографический символ	[100]	[010]	[001]	$\bar{1}00$	$0\bar{1}0$	$00\bar{1}$
Полярное расстояние $\rho$ , град	90	90	0	90	90	180
Долгота $\varphi$ , град	90	0	-	270	180	-

### 3.4. Формулы соответствия между полярными координатами $(\rho, \varphi)$ направлений в кристаллах и их координатными углами $(\lambda, \mu, \nu)$ .

*При решении множества кристаллографических задач графическими методами неоднократно осуществлялись переходы от полярных координат направлений в кристаллах к соответствующим координатным углам и обратно. Такие переходы позволяют в полной мере воспользоваться определенными преимуществами каждой из этих координатных систем.*

Полярная система координат  $(\rho, \varphi)$  - универсальный инструмент для описания **направлений в кристаллах** любых сингоний;

Координатные углы  $(\lambda, \mu, \nu)$  применяют при определении **символов атомных рядов и атомных плоскостей** кристаллов конкретных сингоний.

Согласно формуле сферической геометрии, величина угла  $\chi$  между двумя направлениями, заданными полярными координатами  $(\rho_1, \varphi_1)$  и  $(\rho_2, \varphi_2)$ , может быть выражена:

$$\cos \chi = \cos \rho_1 \cdot \cos \rho_2 + \sin \rho_1 \cdot \sin \rho_2 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

Формулы соответствия для **кубической, тетрагональной, ромбической** сингоний

$$\rho, \varphi \Rightarrow \lambda, \mu, \nu$$

$$\cos \lambda = \sin \rho \cdot \sin \varphi$$

$$\cos \mu = \sin \rho \cdot \cos \varphi$$

$$\cos \nu = \cos \rho$$

$$\lambda, \mu, \nu \Rightarrow \rho, \varphi$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \cos \lambda / \cos \mu$$

$$\sin \rho = \cos \lambda / \sin \varphi$$

$$\rho, \varphi \Rightarrow \lambda, \mu, \nu$$

$$\cos \lambda = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \rho \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{3} - \varphi\right)$$

$$\cos \mu = \sin \rho \cdot \cos \varphi$$

$$\cos \varepsilon = -\frac{\sqrt{3}}{2} \sin \rho \cdot \cos\left(\frac{4\pi}{3} - \varphi\right)$$

$$\cos \nu = \cos \rho$$

$$\lambda, \mu, \nu \Rightarrow \rho, \varphi$$

$$\cos \varphi = \cos \mu / \sin \rho$$

# Контрольные вопросы и задания по Теме 3.

1. Что называют кристаллическим многогранником, его вершиной, ребром, гранью?
2. Какие типы проекций используют в кристаллографии?
3. Дайте определения планарного и полярного комплекса.
4. Что такое аксонометрические и ортогональные проекции?
5. Сферическая проекция и правило ее построения.
6. Дайте определение сферических координат.
7. Как построить стереографическую проекцию точки, направления, плоскости?
8. Назовите свойства стереографических проекций.
9. Гномостереографическая проекция и правило ее построения.
10. Гномоническая проекция и правило ее построения.
11. Что такое стереографическая сетка, приведите примеры.